Mechanische Schwingungen in Tierwelt und Technik

Aufgaben

1 Spinnen besitzen Sinnesorgane, die feinste Schwingungen von Beutetieren wahrnehmen können, die sich in ihrem Netz verfangen haben. Zur Untersuchung der Schwingungen soll vereinfachend angenommen werden, dass das Netz harmonisch schwingt und somit das lineare Kraftgesetz $F_R = -D \cdot y$ zwischen rücktreibender Kraft F_R und Elongation y gilt. Das Netz selbst soll keine Masse besitzen.

1.1 Leiten Sie mithilfe des linearen Kraftgesetzes her, dass für die ungedämpfte harmonische Schwingung einer Masse m die Bewegungsgleichung $\ddot{y}(t) + \frac{D}{m} \cdot y(t) = 0$ gilt.

Zeigen Sie, dass der Ansatz $y(t) = y_0 \cdot \cos(\omega \cdot t)$ diese Gleichung mit der Bedingung $T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{D}}$ löst.

(8 BE)

1.2 Eine Fliege der Masse $m = 50\,\text{mg}$ fliegt mit der Geschwindigkeit $v = 56{,}5\,\frac{\text{cm}}{\text{s}}$ in das Netz und führt dadurch, gefangen im Netz, eine als ungedämpft angenommene Schwingung mit der Frequenz $f = 10\,\text{Hz}$ aus. Es wird angenommen, dass sich die Fliege darüber hinaus nicht bewegt. Berechnen Sie die Richtgröße D und berechnen Sie die maximale Auslenkung dieser Schwingung in der Einheit mm unter der Annahme, dass die komplette kinetische Energie der Fliege in Spannenergie umgewandelt wird.

[zur Kontrolle: $D = 0{,}20\,\frac{\text{N}}{\text{m}}$]

(6 BE)

1.3 Die im Netz gefangene Fliege führt tatsächlich eine gedämpfte Schwingung aus. Eine Darstellung einer solchen gedämpften Schwingung zeigt Material 1.

Zeigen Sie unter Verwendung aller Maxima, dass die Amplitude $A(t) = y_0 \cdot e^{-k \cdot t}$ exponentiell abfällt, und bestätigen Sie für den Dämpfungsfaktor k einen Wert von etwa $1{,}8\,\frac{1}{\text{s}}$.

Berechnen Sie die prozentuale Energieabnahme pro Schwingung.

(10 BE)

2 Ein sogenanntes Aräometer dient zur Bestimmung der Dichte ρ_{Fl} von Flüssigkeiten. In Material 2a ist der Aufbau eines solchen Aräometers dargestellt, in Material 2b ist die Abhängigkeit der Eintauchtiefe von der Flüssigkeitsdichte gezeigt und die Funktion beschrieben.

Im Folgenden soll ein vereinfachtes Aräometer mit einem langen, zylindrischen Glaskolben der Querschnittsgrundfläche A, der unten mit Quecksilber gefüllt ist, betrachtet werden (Material 2c). Die Querschnittsfläche beträgt in allen Aufgaben $A = 12\,\text{cm}^2$.

2.1 Das vereinfachte Aräometer mit der Masse $m = 150\,\text{g}$ soll so geeicht werden, dass mithilfe der Eintauchtiefe h in der Ruhelage des Aräometers die Dichte von Flüssigkeiten an einer Skala abgelesen werden kann. Die Dichteskala soll direkt auf den Zylinder aufgebracht werden.

2.1.1 Zeigen Sie mithilfe des Prinzips des Archimedes, dass $h = \frac{m}{\rho_{\text{Fl}} \cdot A}$ gilt.

(4 BE)

2.1.2 In Material 3 ist ein Ausschnitt des vereinfachten Aräometers mit einer Markierung für die Flüssigkeitsdichte $1{,}0\,\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$ vorgegeben. Ermitteln Sie eine maßstabsgetreue Skala für Dichten von $0{,}8\,\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$ bis $1{,}4\,\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$ und zeichnen Sie diese in Schritten von $0{,}1\,\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$ in Material 3 ein.

(4 BE)

2.2 Ein vereinfachtes Aräometer wird um die Strecke y_0 aus der Ruhelage heraus in die Flüssigkeit eingetaucht und losgelassen. Dadurch wird es zu Schwingungen angeregt. Die Elongation y kann an einer Skala abgelesen werden (Material 4). Ähnlich wie in Aufgabe 1.1 ergibt sich für die Schwingung wieder eine Bewegungsgleichung der Form $\ddot{y}(t) + \frac{D}{m} \cdot y(t) = 0$.

2.2.1 Begründen Sie, dass hier das lineare Kraftgesetz $F_{\text{R}} = -D \cdot y$ mit $D = \rho_{\text{Fl}} \cdot A \cdot g$ gilt, und zeigen Sie, dass für die Periodendauer des schwingenden Aräometers gilt: $T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{\rho_{\text{Fl}} \cdot A \cdot g}}$

(4 BE)

2.2.2 Aus dem Wert der Schwingungsdauer eines bestimmten Aräometers kann mithilfe der Formel aus Aufgabe 2.2.1 auf die Dichte der Flüssigkeit geschlossen werden. Zur genaueren Bestimmung werden Aräometer unterschiedlicher Massen verwendet. Die Periodendauer kann jeweils mithilfe eines geeigneten Messsystems auf eine Stelle nach dem Komma genau gemessen werden. Dabei ergeben sich die Daten aus Material 5. Zur Auswertung soll der Zusammenhang zwischen den Periodendauern T und den Massen m der Aräometer grafisch so dargestellt werden, dass sich durch die Messpunkte eine Ausgleichsgerade legen lässt.
Erläutern Sie, ob dazu $\sqrt{T}$ oder T^2 gegen m aufgetragen werden muss, und geben Sie die entsprechenden Werte in der letzten Zeile in Material 5 an. Zeichnen Sie das zugehörige Diagramm und bestimmen Sie daraus die Dichte der unbekannten Flüssigkeit.

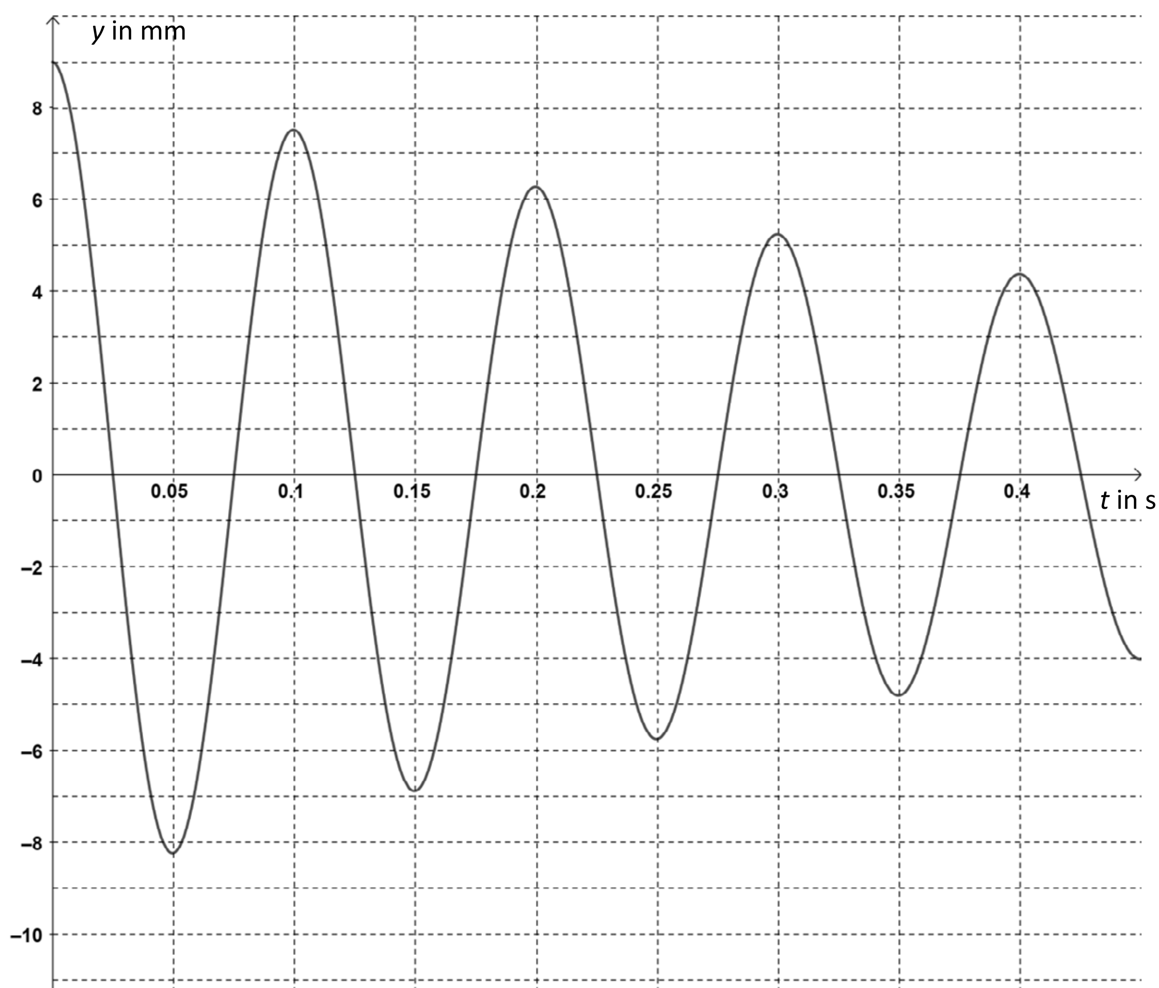
(9 BE)

2.3 Eine medizinische Salzlösung sollte eine Dichte von $1{,}30\,\text{g/cm}^3$ besitzen. Durch einen Fehler in der Mischanlage wurde die Dichte unwissentlich um $0{,}04\,\text{g/cm}^3$ erhöht.
Beurteilen Sie, ob dieser Fehler sowohl mit dem Verfahren aus Aufgabe 2.1 über die Messung der nun folgenden abweichenden Eintauchtiefe als auch mit dem Verfahren aus Aufgabe 2.2 mit der sich nun ändernden Schwingungsdauer bemerkt werden kann, wenn weiterhin ein vereinfachtes Aräometer der Masse $m = 150\,\text{g}$ und der Querschnittsfläche $A = 12\,\text{cm}^2$ verwendet wird.

(5 BE)

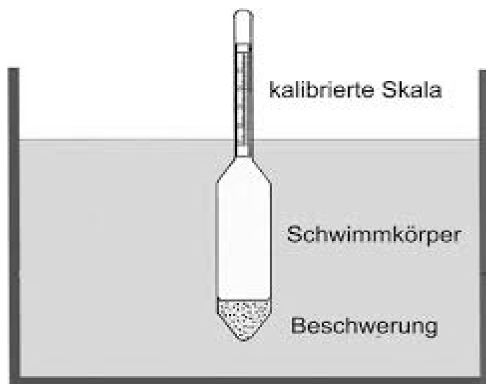
Material 1

Darstellung einer gedämpften Schwingung



Material 2a

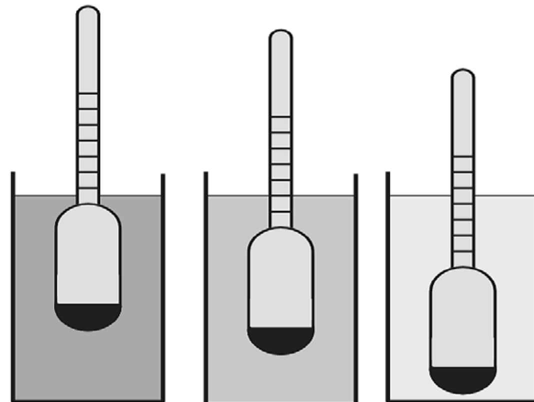
Aräometer in der Ruhelage



URL: https://encrypted-tbn0.gstatic.com/images?q=tbn:ANd9GcSNsxLdsam2BV924q2XP8V0yLG1k68vxNxRVg&usqp=CAU (abgerufen am 06.06.2021).

Material 2b

Zunehmende Eintauchtiefe bei geringer werdender Flüssigkeitsdichte



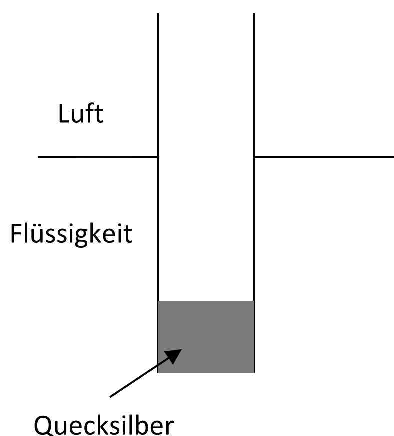
URL: https://media.springernature.com/original/springer-static/image/chp%3A10.1007%2F978-3-662-57757-8_10/MediaObjects/164696_4_De_10_Fig1_HTML.png (abgerufen und bearbeitet am 01.07.2021).

Ein Aräometer besteht, wie in Material 2a abgebildet, aus einem Schwimmkörper, der unten mit Quecksilber gefüllt ist (Beschwerung), und einer Skala zum Ablesen der Dichte (kalibrierte Skala). Das Aräometer taucht in eine Flüssigkeit so ein, dass es mit einer festen Eintauchtiefe h bewegungslos schwimmt (Material 2a und 2b).

Aräometer nutzen folgenden Sachverhalt, der auch Prinzip des Archimedes genannt wird:
Die Auftriebskraft F_A ist gleich der Gewichtskraft des verdrängten Flüssigkeitsvolumens.
Sie gleicht in der Ruhelage die Gewichtskraft F_G des kompletten Tauchkörpers aus.

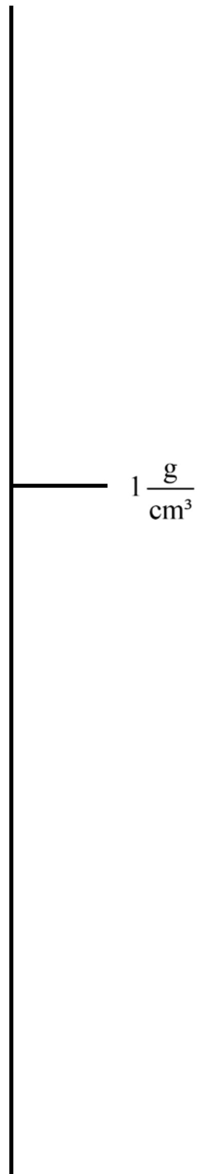
Material 2c

Skizze des vereinfachten Aräometers



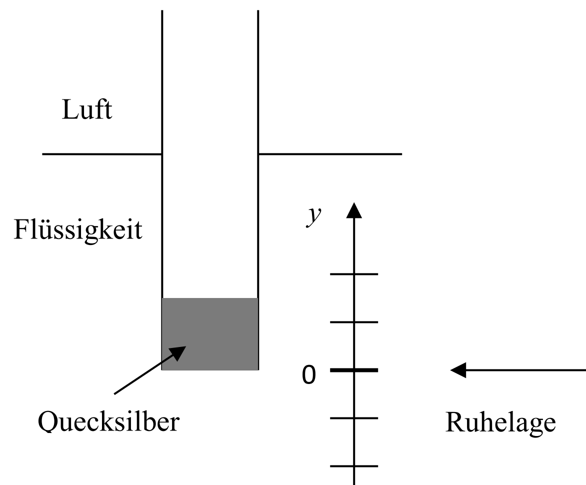
Material 3

Ausschnitt des vereinfachten Aräometers zur Skalierung



Material 4

Schwingung des vereinfachten Aräometers um die Ruhelage



Material 5

Messwerte

m in kg	0,16	0,20	0,25	0,30	0,36
T in s	0,8	0,9	1,0	1,1	1,2

Die letzte Zeile soll zum Angeben berechneter Werte verwendet werden.